

วธ. 498 การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั่วไปในการ
แก้ปัญหาพื้นฐานทางวิศวกรรม

Project

By

Dr. Krisada Chaiyasarn

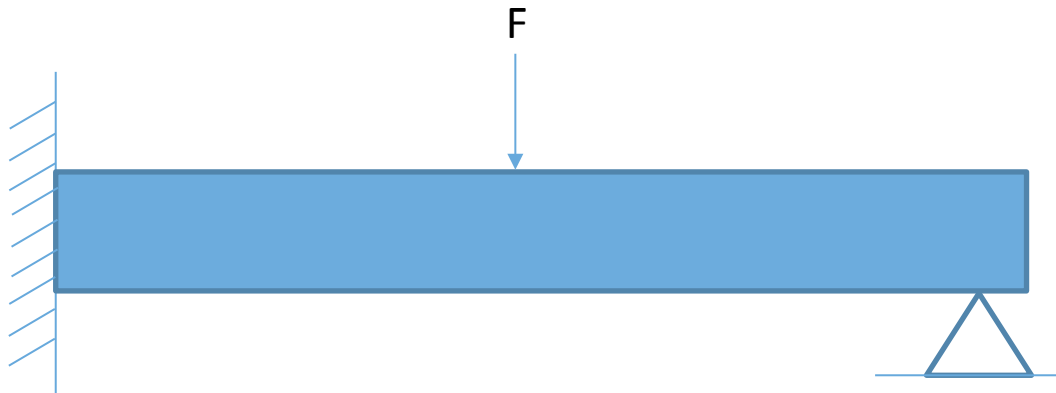
Outline

- แนะนำทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง !
- วิธีการส่ง

ปัญหา

กำหนดให้คานามีจุดรองรับและมีแรงกระทำดังภาพ ให้หา Deflection ของคานาและ วาด Moment diagram และ Shear diagram โดยมีสมมติฐานคือ

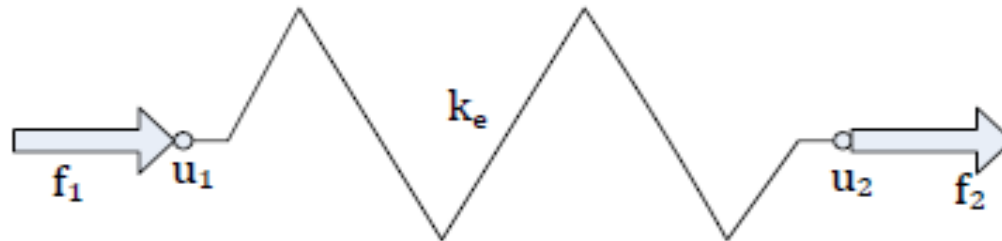
1. แรงกระทำเป็นแบบแรงกระทำเป็นจุด (concentrated force)
2. ระหว่างจุดกระทำหรือ node นั้นพื้นที่หน้าตัดมีค่าคงที่ หรือกล่าวง่ายๆคือ EI มีค่าคงที่
3. แรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่โหนดเท่านั้น



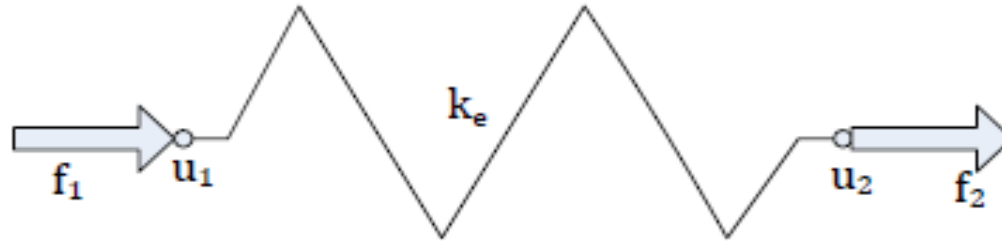
ทฤษฎีเบื้องต้น

สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างสามารถวิเคราะห์โดยใช้เมทริกซ์ได้ซึ่งเป็นวิธีการที่เหมาะสมสำหรับการเขียนโปรแกรมวิเคราะห์ในแมทแลป ทฤษฎีนี้ นักศึกษาได้เรียนละเอียดจาก Structural Analysis II

ในการวิเคราะห์เราจะใช้ทฤษฎีของสปริงในการวิเคราะห์โครงสร้าง โดยจากรูปด้านล่างกำหนดให้ชิ้นส่วนย่อยมีความความแข็งหรือ stiffness เป็น k_e ประกอบด้วย 2 โหนด u_1 และ u_2 และมี Degree of Freedom (DoF) คือ 1 และมีแรงกระทำที่โหนดคือ f_1 และ f_2 ตามลำดับ



ทฤษฎีเบื้องต้น

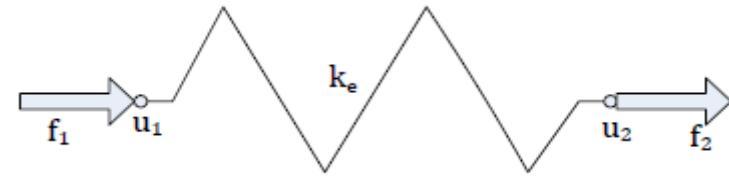


เราสามารถเขียนสมการในรูปของเมทริกซ์เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ของโหนด u_1 และ u_2 ได้คือ

$$\begin{aligned}k_e(u_1 - u_2) &= f_1 \\k_e(-u_2 + u_1) &= f_2\end{aligned}$$

และสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น $Ax = b$ หรือในที่นี้คือ $ku = f$ ได้คือ

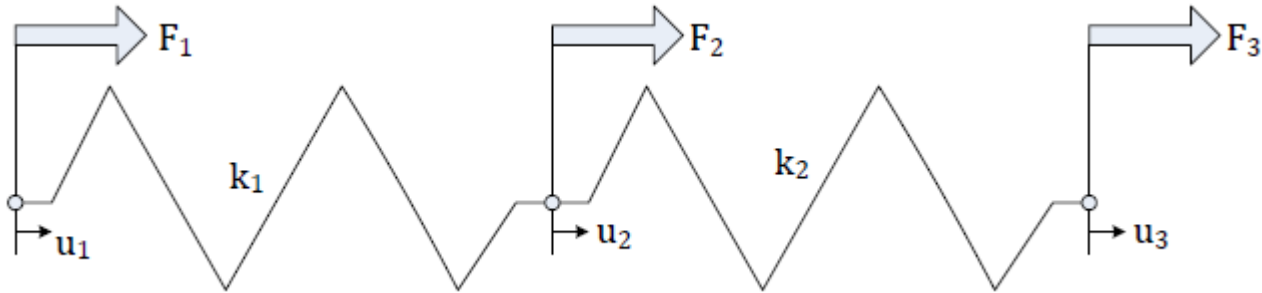
$$\begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$



ทฤษฎีเบื้องต้น

- จากสมการเบื้องต้นจะเห็นได้ว่า k หรือ stiffness matrix เป็นเมทริกซ์ singular เนื่องจาก $\det(k) = 0$ เนื่องจากสมการทั้งสองสมการนั้นไม่ independent
- จะเห็นได้ว่าอย่างน้อย u_1 หรือ u_2 นั้นต้องมีการกำหนดเพราะไม่เช่นนั้นแล้วสปริงจะเคลื่อนตัวทั้งหมดแบบ Rigid Body Motion ซึ่งเราไม่สามารถใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างสมดุลได้
- สำหรับ u_1 หรือ u_2 เราเรียกว่า Boundary Conditions
- โดยสรุปแล้วจำเป็นต้องกำหนดค่าของแรงกระทำหรือ Boundations เพื่อให้ระบบสามารถหาคำตอบได้

ทฤษฎีเบื้องต้น - หลายสปริง



ถ้านำสปริงมาต่อกัน เราสามารถเขียนสมการเมทริกซ์เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโหนดและแรงกระทำภายนอกได้คือ

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{bmatrix}$$

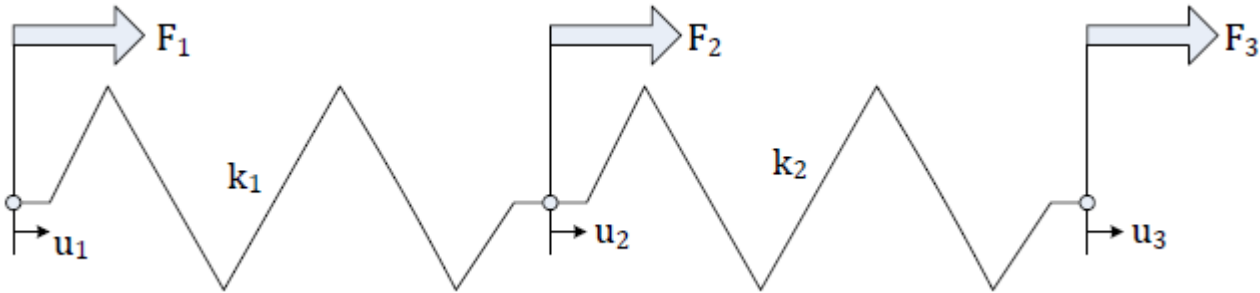
$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$f_{1,1} = F_1$$

$$f_{3,2} = F_3$$

$$f_{2,1} + f_{2,2} = F_2$$

ทฤษฎีเบื้องต้น - หลายสปริง



เราสามารถรวมสมการทั้งสี่ให้เหลือเพียงสามได้โดยใช้โหนดที่สอง ซึ่งเป็นโหนดร่วม

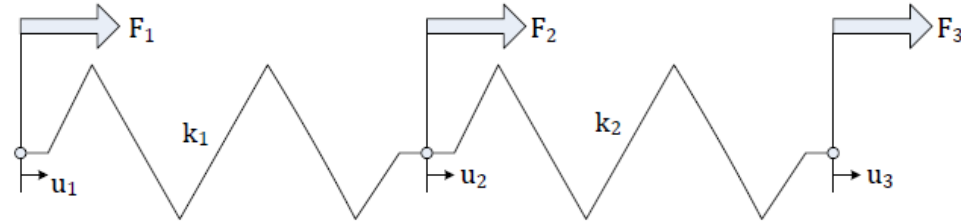
$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

จะสังเกตได้ว่า สมการนี้สามารถรวมกันได้โดยการรวมกันของ Stiffness Matrix

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

และจะสังเกตได้ว่าอย่างน้อย u_1 หรือ u_2 หรือ u_3 จำเป็นต้องมีการกำหนดเพื่อไม่ให้ระบบเกิดการเคลื่อนที่แบบ Rigid Body Motion

ทฤษฎีเบื้องต้น - ตัวอย่าง



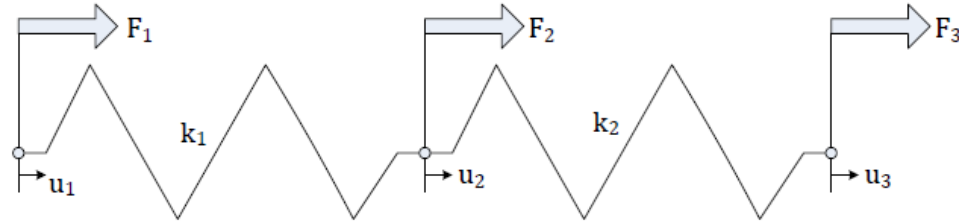
กำหนดให้ระบบสปริงมีการจัดระบบดังรูปข้างบน โดยกำหนดให้ $k_1 = 10 \text{ N/mm}$ $k_2 = 20 \text{ N/mm}$ กำหนดให้ displacement ของโหนดที่หนึ่งคือ 3 mm และแรงกระทำที่โหนดที่ 2 และ 3 คือ 50 N และ 100 N ตามลำดับ

ขั้นตอน

สามารถหา stiffness matrix ได้คือ $\begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$

สามารถเขียนสมการใหม่ได้คือ $\begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีเบื้องต้น - ตัวอย่าง



สำหรับการอัลกอริทึมในการคำนวณให้ทำดังต่อไปนี้

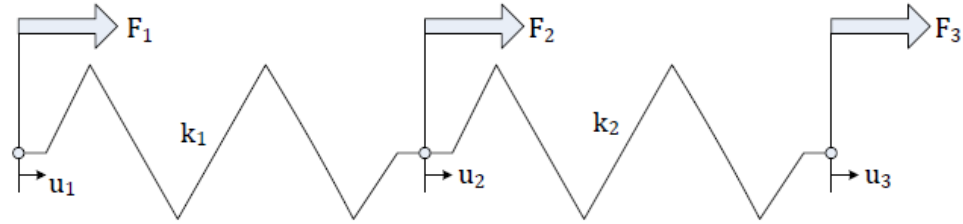
เนื่องจากโหนดที่หนึ่งกำหนด displacement ให้แล้วจึงสามารถตัดออกได้ ดังนั้น

สมการจะกลายเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 50 - (-10)3 \\ 100 - 0(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix}$$

จากนั้นให้ทำการสับเปลี่ยนสมการใหม่ ซึ่งจะเห็นได้ว่าแถวและคอลัมน์ที่อยู่ในตำแหน่งของโหนดที่เป็น Boundary Conditions นั้น จะเปลี่ยนเป็น [1 0 0] หรือ [1 0 0]' ตามลำดับ และเป็นได้ว่าข้างขวาของสมการนั้น ได้เปลี่ยนไปด้วยเช่นกัน เช่น $50 - (-10)*3$ หรือ ค่าเดิม - (สัมประสิทธิ์)*(Force ตำแหน่งเดียวกับโหนด Boundary Conditions) ให้ทำเช่นเดียวกันจนสามารถเปลี่ยน Force เวกเตอร์ได้หมด จะเห็นว่าเราสามารถจัดสมการให้อยู่ในรูป $ku = f$ ซึ่งเราสามารถหาค่า u ได้จาก $u = k \setminus f$ ในเมทแลป

ทฤษฎีเบื้องต้น - ตัวอย่าง



เมื่อหาค่า u ได้แล้ว เราสามารถจัดสมการให้อยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 30 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 18 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถนำกลับไปแทนค่าหรือ Back Substitution เพื่อหาค่าแรงกระทำแต่ละโหนดได้

$$\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 150 \end{bmatrix}$$

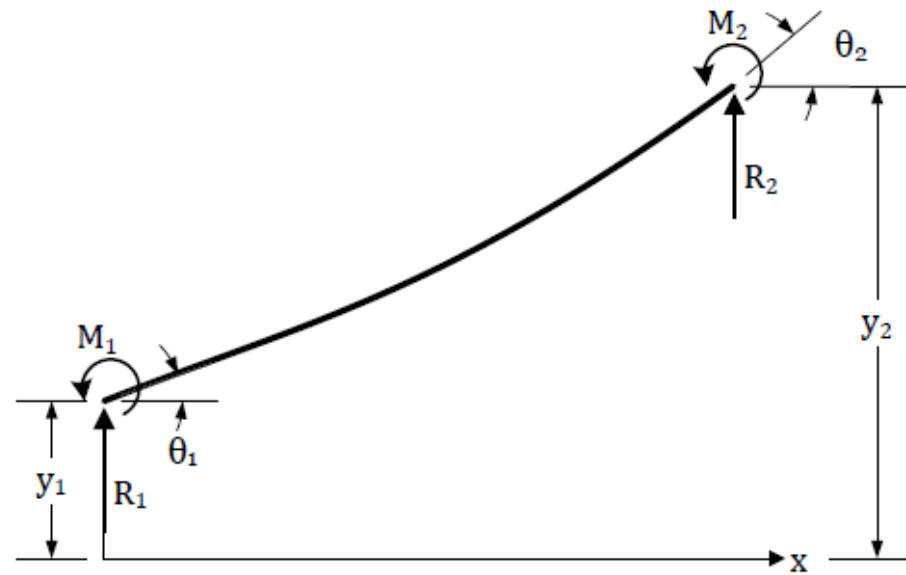
$$\begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีเบื้องต้น - สรุป

เราสามารถสรุปเป็นอัลกอริทึมได้ดังนี้

1. ให้หา Stiffness Matrix ของแต่ละ Element
- 2.ให้นำเมทริกซ์ย่อยของแต่ละ Element มาทำการรวมกันให้เป็นเมทริกซ์ใหญ่
อันเดียว
3. ให้สร้าง Force Vector
4. ให้ทำการเปลี่ยน Stiffness Matrix และ Force Vector ตามวิธีการเบื้องต้น
หลังจากที่ได้ทำการใส่ Boundary Conditions
5. ให้หาค่า Displacement ของแต่ละโหนด
6. ให้หาค่าแรงภายนอกและภายในจากการทำ Back Substitution
7. วาด Shear และ Bending Moment Diagram

ปัญหาสำหรับโปรเจกต์ - คาน



ในการประยุกต์ทฤษฎีเพื่อใช้กับคานนั้นมีหลักการเหมือนกัน ที่ต่างกันคือมีแรงกระทำสองชนิดคือ แรงเฉือนและโมเมนต์ และในแต่ละโหนดมี DoF สองชนิดคือ การกระจัด (Displacement) และความชัน (Slope)

เราสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ระหว่างความชันกับแรงเฉือน และการกระจัดกับความชันและแรงเฉือนได้คือ

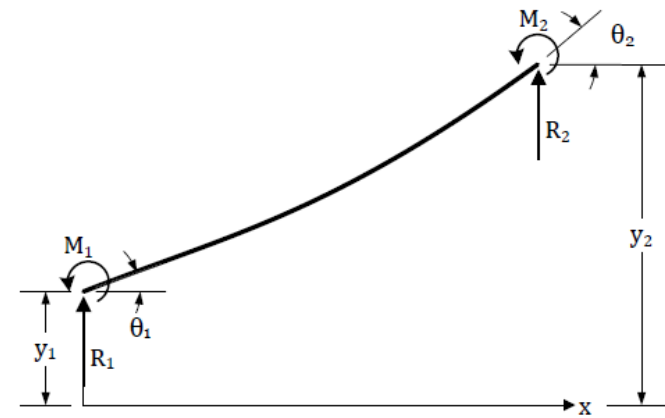
$$\theta(x) = \theta_1 + \frac{1}{EI} \left(-M_1 x + \frac{1}{2} R_1 x^2 \right)$$

$$y(x) = y_1 + \theta_1 x + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} M_1 x^2 + \frac{1}{6} R_1 x^3 \right)$$

ปัญหาสำหรับโปรเจกต์ - คาน

สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้คือ

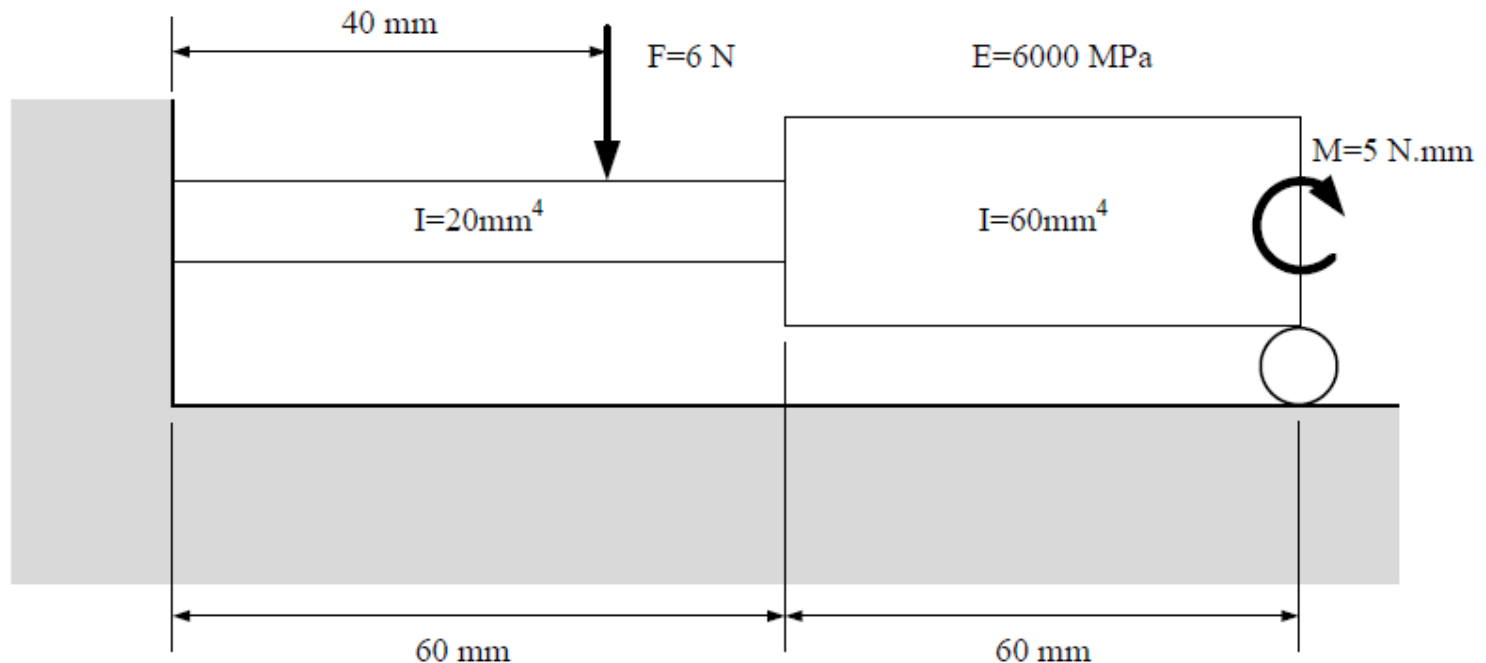
$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6 & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$



สำหรับคานนี้ อย่างน้อย Boundary Conditions อย่างน้อยหนึ่งตัวต้องเป็นการกระจัด (Displacement)

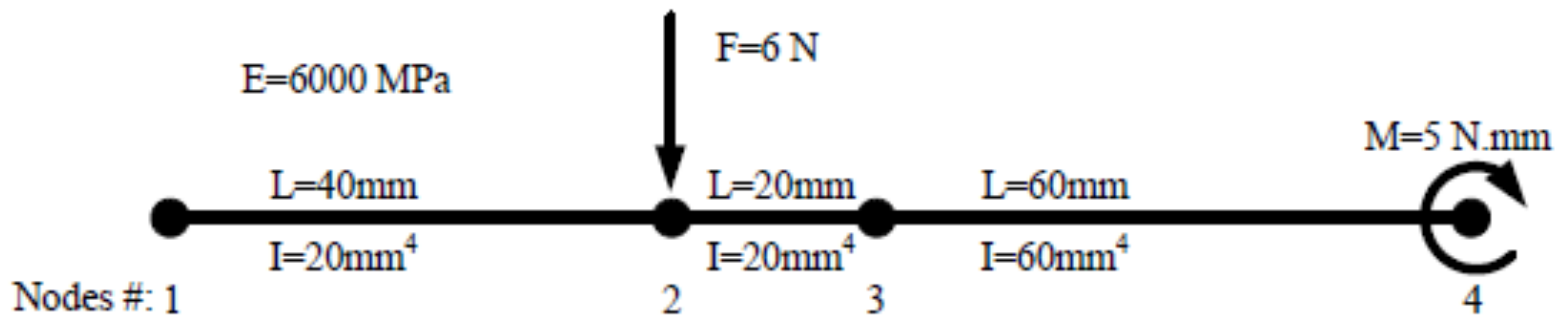
ปัญหา

จากรูปดังกล่าว ให้เขียนเมทแลปเพื่อทำการหาการกระจัด ความชัน และให้วาดกราฟ Shear และ Bending Moment หลังจากนั้นให้ทำการตัดแปลงโปรแกรมสำหรับปัญหาทางโครงสร้างที่นักศึกษาเลือกมาเองพร้อมทั้งทำการพิสูจน์ด้วยว่าคำตอบเราถูกต้องหรือไม่



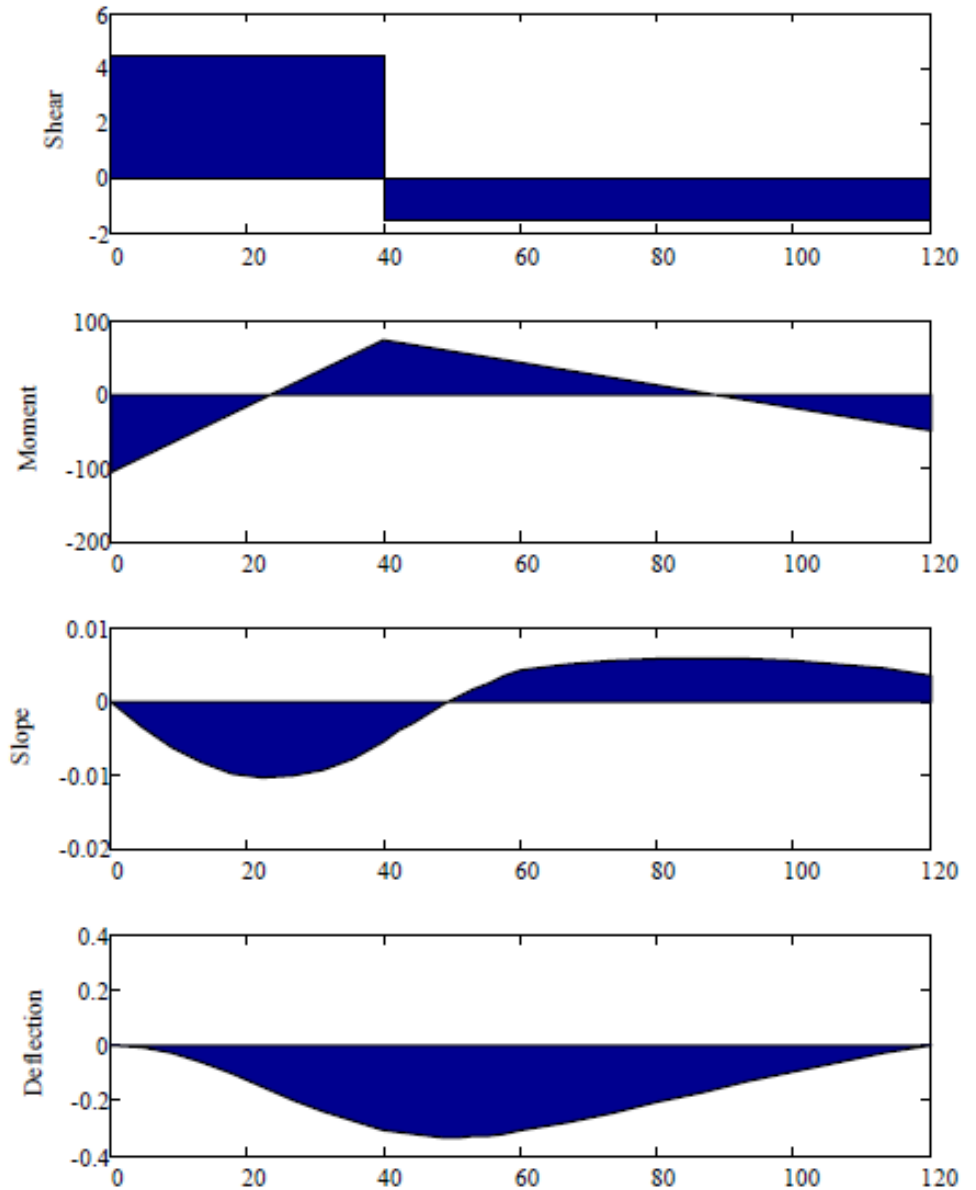
ปัญหา

สำหรับปัญหาข้างต้นสามารถสร้างแบบจำลองได้ดังนี้



คำตอบ

คำตอบที่ได้ควรมีลักษณะดังกล่าว



การให้คะแนน

- สำหรับโปรเจกต์มีคะแนนทั้งหมด 25% ของทั้งวิชา แบ่งเป็นดังนี้
 - ความถูกต้องและความสมบูรณ์ของโปรแกรม 10%
 - รายงาน 7.5%
 - การนำเสนอ 7.5%
- รายงานและการนำเสนอควรประกอบด้วยต่อไปนี้
 - ปัญหา
 - ทฤษฎี
 - โปรแกรม
 - ผลการแก้ปัญหา
- นำเสนอไม่เกิน 15 นาทีต่อกลุ่ม