

DE498/598 การใช้คอมพิวเตอร์ทั่วไปในการแก้
ปัญหาทางวิศวกรรม

Lecture 6: การใช้ Matlab เบื้องต้น 5

ดร. กฤษฎา ไชยสาร

Outline

- การแก้สมการพีชคณิตเชิงเส้น
- การวาดกราฟ

การแก้สมการพีชคณิตเชิงเส้น

- ในทางคณิตศาสตร์การใช้เมทริกซ์ โดยหลักการคือการแก้สมการที่มีหลายตัวแปร หรือ simultaneous equations โดยเราสามารถเขียนสมการหลายตัวแปรให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ ตามตัวอย่างด้านล่าง โดย A คือ เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ b คือ เวกเตอร์สำหรับค่าคงที่ และ เวกเตอร์ x คือ เวกเตอร์ตัวแปรที่เราต้องการหาคำตอบ

$$\begin{array}{r}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots = \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{array}
 \quad
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_m
 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

คำตอบในกรณีที่ A มีอินเวอร์ส

- สำหรับสมการเชิงเส้นอย่างง่ายที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการ เมทริกซ์ A ที่ได้จะเป็นเมทริกซ์สี่เหลี่ยมจัตุรัส เช่น

$$\begin{aligned}
 x + y &= 3 \\
 2x - 3y &= 5
 \end{aligned}$$

```

>>A = [1 1
        2 -3];
>>b = [3 5]';
>>x = inv(A)*b
  
```

Gaussian elimination และ LU factorisation

- การใช้ inverse สำหรับเมทริกซ์นั้นไม่ค่อยดีเท่าที่ควรเนื่องจากใช้เวลาในการหา inverse ค่อนข้างสูงดังนั้นในการหา inverse ของเมทริกซ์นั้นการใช้ LU factorization หรือ Gaussian Elimination นั้นเอง
- สำหรับการหา LU factorization นั้นเมทริกซ์ที่ operator คือ backslash \ และ forward slash / ตามตารางข้างล่าง

operator	to solve	MATLAB command	mathematical equivalent	name
\	$AX = B$	$A \setminus B$	$A^{-1}B$	left division (backslash)
/	$XA = B$	B / A	BA^{-1}	right division (forward slash)

Singular matrices และ rank

- สำหรับระบบสมการที่มี $\det(A) = 0$ หรือเป็น singular matrix จะไม่สามารถหา inverse ได้และสมการจะไม่มี unique solution เช่น

$$\begin{aligned}u + v + w &= 2 \\2u + 3w &= 5 \\3u + v + 4w &= 6\end{aligned}$$

```
>>A = [1 1 1
      2 0 3
      3 1 4];
>>b = [2 5 6]';
>>x = A\b
```

Singular matrices และ rank

- สมการตามตัวอย่างก่อนหน้านี้ ทั้งสามสมการไม่เป็นอิสระจากกัน เพราะสมการที่สามเกิดจากสองสมการก่อนหน้านี้ ถ้าหา rank ของเมทริกซ์ A เราจะได้แค่ 2 ซึ่งเท่ากับจำนวนสมการที่เป็นอิสระจากกัน

```
>>rank(A)
```

- ดังนั้นก่อนหาคำตอบจำเป็นต้องเช็คว่าสมการแต่ละสมการเป็นอิสระจากกันหรือไม่

Ill-conditioning

- สมการบางชนิดอาจเกือบเป็น singular ซึ่งถ้ามีการเปลี่ยนข้อมูลเล็กน้อย อาจจะทำให้คำตอบต่างจากเดิมเยอะมาก เช่น

```
>>M = [1 1; 1 1.01]; b = [2 2.01]';
```

```
>>x = M\b
```

- ให้ลองเปลี่ยนตัวเลขในเมทริกซ์ A เล็กน้อยเพื่อดูการเปลี่ยนแปลงของคำตอบ

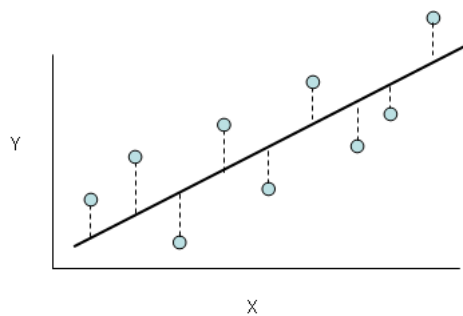
```
>>M(1,2) = 1.005;
```

```
>>M\b
```

- จะเห็นว่าเมทริกซ์ M มีความไวต่อการเปลี่ยนตัวเลขมากซึ่งความไวของเมทริกซ์สามารถหาได้จาก $\text{cond}(M)$ ยิ่งค่า condition ยิ่งมากเมทริกซ์ยิ่งมีความไว

Over-determined systems: Least squares

- สำหรับระบบที่มีจำนวนสมการมากกว่าตัวแปรซึ่งเป็นปัญหาที่เจอได้ทั่วไป เช่น การหาสมการเส้นตรงจากข้อมูลที่วัดได้ ในการแก้สมการจำเป็นจะเป็น over-determined systems ดังนั้นจะไม่สามารถหาคำตอบที่แท้จริงได้ แต่คำตอบที่ได้จะเป็น best fit ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ที่พยายาม minimize ค่า Root mean squares error



Over-determined systems: Least squares

- สำหรับสมการที่อยู่ในรูป $Ax = b$ คำตอบของสมการจะเป็นคำตอบที่เกิดจาก least squares และเป็น pseudoinverse ตามสมการด้านล่าง

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

- สำหรับคำตอบในเมทริกซ์การใช้ \ จะเป็นการใช้ Gaussian Elimination ในการหาคำตอบ ส่วนถ้าเป็นระบบสมการ Over-determined system เมทริกซ์จะให้คำตอบที่มาจาก least squares หรือสามารถใช้ฟังก์ชัน pinv แทนการใช้ \

Over-determined systems: Least squares – ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}2x - y &= 2 \\ x + y &= 5 \\ 6x - y &= -5\end{aligned}$$

```
>> A=[2 -1; 1 1; 6 -1];
>> b = [2 5 -5]';
>> x = inv(A'*A)*A'*b
x =
   -0.0946
    2.4459
>> x=pinv(A)*b
x =
   -0.0946
    2.4459
>> x = A\b
x =
   -0.0946
    2.4459
```

กราฟ

- แมทแลปสามารถใช้พลอตกราฟได้ทั้ง 2D และ 3D
- การใส่มากกว่า 1 กราฟในหนึ่ง figure ให้ใช้ subplot เช่น

```
subplot(rows, columns, select)
```

```
>> x = linspace(-10, 10);
>> subplot(2,1,1) % Specify two rows, one column, and select
>> % the top one as the current graph
>> plot(x, sin(x));
>> subplot(2,1,2);
>> plot(x, sin(x)./x);
```

การเขียนกราฟ 3D

- ให้ใช้คำสั่ง plot3 ในการ plot สามมิติซึ่งต้องเป็น plot3(x,y,z) โดย x y และ z ต้องเป็นเวกเตอร์

```
>> t = 0:pi/50:10*pi;
>> x = sin(t); y = cos(t); z = t;
>> plot3(x, y, z);
```

การวาดกราฟที่เป็น surface

- สามารถวาดกราฟที่เป็น surface ได้ตามตัวอย่างสมการ

$$f(x, y) = (x - 3)^2 - (y - 2)^2$$

```
>> x = 2:0.2:4; % Define the x- and y- coordinates
>> y = 1:0.2:3; % of the grid lines
>> [X,Y] = meshgrid(x, y); %Make the grid

>> Z=(X-3).^2 - (Y-2).^2;
>> surf(X,Y,Z)
```

Assignment

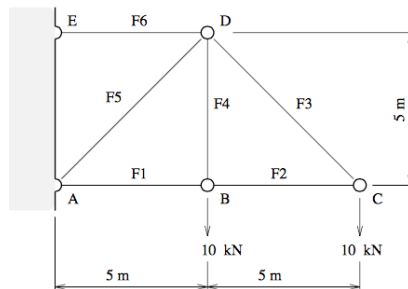
ในการสร้างสะพานหรือเครน วิศวกรส่วนใหญ่ใช้โครงสร้างที่เป็นแบบโครงถัก 2 มิติในการออกแบบโดยขั้นตอนในการหาแรงต่างๆในโครงถักประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้

1. ในแต่ละข้อต่อหรือ joint ผลรวมของแรงกระทำภายในและภายนอกในแนวแกน x และ y ต้องเป็น 0
2. ในแต่ละจุดรองรับหรือ support ผลรวมของแรงกระทำภายในและภายนอกในแกน x และ y ต้องเป็น 0
3. สำหรับโครงสร้ารวม หรือโครงสร้าย่อยๆ ผลรวมของโมเมนต์ต้องเป็น 0

Assignment

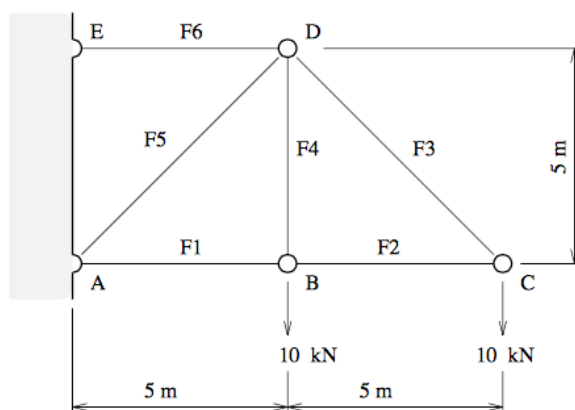
สำหรับรูปด้านล่างเป็นโครงสร้างแบบ cantilever ที่สามารถรับแรง 10 kN ได้ที่จุด B และ C โดยมีสมมติฐานคือ

1. โครงถักสามารถรับได้แค่แรงในแนวแกนหรือ axial force ได้เท่านั้น ให้แรงดึงเป็นบวกและแรงกดเป็นลบ
2. แต่ละ joint เป็น pinned คือไม่มี moment มีเพียงแค่ axial force จากโครงถักเท่านั้น



Assignment

ให้เขียนเมทริกซ์สปีทเพื่อหาแรงในแต่ละ member รวมทั้งหา support reaction



คำใบ้

1. ให้เขียนสมการสมดุลในแต่ละ joint
2. ให้นำสมการมาสร้างในรูปของเมทริก
3. จากนั้นให้หาค่าแรงแต่ละแรงโดยใช้ $Ax = b$
4. ให้หาสมการเพื่อหาแรงที่จุด support จากนั้นให้เขียนในรูป $R = AF$